



TITLE:

曲線渦糸上のNソリトン(ナヴィエ・ストークス方程式の解と場の構造)

AUTHOR(S):

福本, 康秀; 宮寄, 武

CITATION:

福本, 康秀 ...[et al]. 曲線渦糸上のNソリトン(ナヴィエ・ストークス方程式の解と場の構造). 数理解析研究所講究録 1986, 601: 126-140

ISSUE DATE:

1986-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99615>

RIGHT:

曲線渦系上のNソリトン

東大理 福本康秀 (Yasuhide Fukumoto)

国立公害研 宮崎 武 (Takeshi Miyazaki)

§ 1. はじめに

渦度場の時間発展の知見を得ることは重要である。なぜならば、非圧縮性流体の速度場は、渦度の分布を与えればほとんど決まってしまうからである。流体の中で渦度が断面積の小さな管の中に集中しているとき、それを断面積無限小の曲線とみなして、理想化した概念が渦系である。本研究では、完全流体中での次元的な変形を起こす渦系の運動を扱う。

このような運動を記述するための近似方程式として、藤原、高橋¹⁾、浜²⁾らは局所誘導方程式 (localized induction equation - LIE) を提案した。この解として、らせん渦³⁾、変形する渦輪⁴⁾、エラスティカ⁵⁾などが見出された。その後、橋本⁶⁾は、LIEを非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) に変換することによって、1ソリトン解を得た。この解は、無限に延びた直線状の渦系が局所的に変形して、そのおじれ変形が形を変

えずに一定速度で伝わる運動を表わしている。ここでは、これを kink wave と呼ぼう。10年後、この kink wave の存在が、Hopfinger たちの実験⁹⁾ によ、て確認された。さらにその後、Maxworthy^{5,10)} はより制御された条件のもとで実験を行ない、2つの kink wave を正面衝突させても、各々の波は個性を失わず、但し、衝突の結果として、前方への phase-shift が生じることを観察した。このことは、kink wave がソリトンに他ならないことを物語っている。この現象を理論的に解析するのが本研究の目的であり、LIE の N ソリトン解をあらわな形で呈示する。§2 では、LIE について説明を行ない、§3 では、広田¹¹⁾ による 2 次形式化を与える。そして §4 で、 N ソリトン解を書き下し、§5 と §6 で、ソリトン間の衝突について論ずることにする。

§2. 基礎方程式

無限に広がる非圧縮、非粘性流体において、渦糸は Biot-Savart の法則に従って誘導される速度で運動する (Helmholtz の渦定理)。局所誘導近似とは、渦糸の断面が十分に小さいとき、渦糸の各点に誘導される速度は、その点のごく近傍の渦糸の断片によって決定されるという近似であり、局所誘導方程式は、渦糸の位置を $\mathbf{x}(s, t)$ とし、時間の単位をうまく取

り直すと、次のように与えられる。

$$\mathbb{X}_t = \mathbb{X}_s \times \mathbb{X}_{ss}. \quad (1)$$

但し、 s は渦糸に沿う長さ、 t は時間、 $\mathbb{X}_t, \mathbb{X}_s$ は t, s に関する微分を表わす。(1) を s について 1 回微分すれば

$$\mathbb{X}_t = \mathbb{X} \times \mathbb{X}_{ss}; \quad \mathbb{X} = \mathbb{X}_s \quad (2)$$

となり、接ベクトル \mathbb{X} をスピンの同一視すれば、古典 Heisenberg 方程式を得る。

橋本⁷⁾ は、LIE (1) と、曲線論で登場する Serret-Frenet 方程式とを組み合わせ、(1) を NLS に帰着させた。

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi; \quad \psi = k \exp[i \int_0^s \tau ds]. \quad (3)$$

ここで、 k, τ は、各々、渦糸の曲率、わい率を表わす。橋本は、NLS の 1 ソリトン解から、 k と τ の表式を導き、それをもとに渦糸のソリトン解を構成した。しかし、NLS の N ソリトンの k と τ から LIE の N ソリトン解を構成することは、きわめて困難であると言える。Levi^{5 (12), (13)} は、曲面論を用いることによって、2 ソリトン解を具体的に計算したが、彼らの方法に基づいて N ソリトン解を書き下すのは困難である。一方、(1) あるいは (2) は、広田⁷⁾ によって bilinear 方程式に変換された。これに基づけば、もっと直接的に N ソリトン解を求めることが可能になる。

§ 3. 2次形式

LEEを2次形式に直した結果は以下のようになる¹⁾

$$D_s(f^* \cdot f + g^* \cdot g) = 0, \quad (4)$$

$$(iD_t + D_s^2)f \cdot g^* = 0, \quad (5)$$

$$(iD_t - D_s^2)(f^* \cdot f - g^* \cdot g) = 0. \quad (6)$$

但し, D_s, D_t は広田の微分演算子で, その定義は

$$D_s^m D_t^n f(s, t) \cdot g(s, t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n f(s, t) g(s', t') \Big|_{\substack{t'=t \\ s'=s}} \quad (7)$$

である。また, $*$ は複素共役を意味し, f, f^*, g, g^* は接ベクトル世と次のような関係がある。

$$t_1 + it_2 = \frac{2f^*g}{f^*f + g^*g}, \quad t_3 = \frac{f^*f - g^*g}{f^*f + g^*g}. \quad (8)$$

以上が広田によるものであるが, この解はまだ発表されていないので, 次節でそれについて述べよう。

§ 4. Nソリトン解

方程式(4)-(6)のNソリトン解を書き下す。

$$f = \sum'_{N_i=0,1} \exp \left[\sum_{i < j}^{(2N)} \varphi(i, j) N_i N_j + \sum_{i=1}^{2N} N_i \{ \eta_i + \psi(i) \} \right], \quad (9)$$

$$f^* = \sum'_{N_i=0,1} \exp \left[\sum_{i < j}^{(2N)} \varphi(i, j) N_i N_j + \sum_{i=1}^{2N} N_i \{ \eta_i - \psi(i) \} \right], \quad (10)$$

$$g = \sum_{V_i=0,1}'' \exp \left[\sum_{i < j}^{(2N)} \varphi(i, j) V_i V_j + \sum_{i=1}^{2N} V_i \{ \eta_i - \psi(i) \} \right], \quad (11)$$

$$g^* = \sum_{V_i=0,1}''' (-1) \exp \left[\sum_{i < j}^{(2N)} \varphi(i, j) V_i V_j + \sum_{i=1}^{2N} V_i \{ \eta_i + \psi(i) \} \right]. \quad (12)$$

ここで

$i=1, 2, \dots, 2N$ に対して $\eta_i = p_i \varepsilon - \Omega_i t + \eta_i^0$, $\Omega_i = -i p_i^2$ (13)
であり, p_i と η_i^0 は複素定数で, i 番目のソリトンの位相と振幅を決めるものである。さらに,

$$i=1, 2, \dots, N \text{ に対して } \eta_{i+N} = \eta_i^*, p_{i+N} = p_i^*, \Omega_{i+N} = \Omega_i^* \quad (14)$$

の関係がある。 $\varphi(i, j)$ と $\psi(j)$ の定義は

$$\left. \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, N \text{ かつ } j=N+1, \dots, 2N \\ \text{あるいは, } i=N+1, \dots, 2N \text{ かつ } j=1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \text{ のとき, } \varphi(i, j) = -\log [(p_i + p_j)^2],$$

$$\left. \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, N \text{ かつ } j=1, 2, \dots, N \\ \text{あるいは } i=N+1, \dots, 2N \text{ かつ } j=N+1, \dots, 2N \end{array} \right\} \text{ のとき, } \varphi(i, j) = \log [(p_i - p_j)^2], \quad (15)$$

$$j=1, 2, \dots, N \text{ に対して } \psi(j) = \log p_j,$$

$$j=N+1, \dots, 2N \text{ に対して } \psi(j) = -\log(-p_j) \quad (16)$$

である。 $\sum_{i=1}^N \mu_i$, $\sum_{i=1}^{2N} \mu_i$, $\sum_{i=1}^{2N} \mu_i$ は, 各々, $\sum_{i=1}^N \mu_i = \sum_{i=1}^N \mu_{i+N}$, $\sum_{i=1}^N \mu_i = 1 + \sum_{i=1}^N \mu_{i+N}$, $1 + \sum_{i=1}^N \mu_i = \sum_{i=1}^N \mu_{i+N}$ という条件のもとで, $\mu_i = 0, 1, \dots, \mu_{2N} = 0, 1$ のあらゆる組み合わせについて和をとることを意味する。また, $\sum_{i < j}^{(2N)}$ の意味は, $2N$ 個の要素の中から可能なあらゆるペアを選んで, それに渡って和をとること

いうことである。なお, p_i はすべて異なるものと仮定する。

$N=1$ のときは, もちろん橋本ソリト¹⁾が得られる。2ソリト²⁾解($N=2$)をあらわに書くと,

$$f = 1 - \frac{p_1 e^{\eta_1 + \eta_1^*}}{p_1^* (p_1 + p_1^*)^2} - \frac{p_2 e^{\eta_2 + \eta_2^*}}{p_2^* (p_2 + p_2^*)^2} - \frac{p_2 e^{\eta_2 + \eta_1^*}}{p_1^* (p_2 + p_1^*)^2} - \frac{p_1 e^{\eta_1 + \eta_2^*}}{p_2^* (p_1 + p_2^*)^2} \\ + \frac{p_1 p_2 (p_1 - p_2)^2 (p_1^* - p_2^*)^2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_1^* + \eta_2^*}}{p_1^* p_2^* (p_1 + p_1^*)^2 (p_1 + p_2^*)^2 (p_2 + p_1^*)^2 (p_2 + p_2^*)^2}, \quad (17)$$

$$g = \frac{e^{\eta_1}}{p_1} + \frac{e^{\eta_2}}{p_2} - \frac{p_1^* (p_1 - p_2)^2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_1^*}}{p_1 p_2 (p_1 + p_1^*)^2 (p_2 + p_1^*)^2} - \frac{p_2^* (p_1 - p_2)^2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^*}}{p_1 p_2 (p_1 + p_2^*)^2 (p_2 + p_2^*)^2} \quad (18)$$

となつて, かなり複雑な表式になる。

さて, これから, (9)-(12)の表式で与えられる f, f^*, g, g^* が方程式(4)-(6)を満足することを, 直接代入することによつて確かめよう。証明のやり方は, 広田⁴⁾のと, た方法とほぼ同じなので, ここでは概略を述べるにとどめる。

まず, (9)-(12)を(4)-(6)に代入する。その際に恒等式

$$D_s^m \exp(p_1 s) \cdot \exp(p_2 s) = (p_1 - p_2)^m \exp[(p_1 + p_2)s] \quad (19)$$

を用いる。そうすると, 例えば(5)の場合には,

$$\sum'_{\mu_i=0,1} \sum''_{\nu_i=0,1} \left[i \left\{ \sum_{i=1}^{2N} -\Omega_i (\mu_i - \nu_i) \right\} + \left\{ \sum_{i=1}^{2N} p_i (\mu_i - \nu_i) \right\}^2 \right]$$

$$\times \exp \left[\sum_{i < j}^{(2N)} \varphi(i, j) (\mu_i \mu_j + \nu_i \nu_j) + \sum_{i=1}^{2N} (\mu_i + \nu_i) \psi(i) + \sum_{i=1}^{2N} (\mu_i + \nu_i) \eta_i \right] = 0 \quad (20)$$

が満足していればよいことがわかる。(4)と(6)についても同様である。ここで

$$\exp \left[\sum_{i=1}^L \eta_i + \sum_{i=1}^{L'} \eta_{i+N} + \sum_{i=L+1}^{L+M} z \eta_i + \sum_{i=L'+1}^{L'+M'} z \eta_{i+N} \right] \quad (21)$$

の係数を, (4)-(6)に対応して, 各々 D_1, D_2, D_3 とおくと, 任意の L, L', M, M' に対して, $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ が要請されねばならない。長い計算の後, 結局以下の恒等式が示されればよいことがわかる。

$$\text{奇数の } n \text{ に対して } \hat{D}_1(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n) = 0, \quad (22)$$

$$\text{偶数の } n \text{ に対して } \hat{D}_2(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n) = 0, \quad (23)$$

$$\text{偶数の } n \text{ に対して } \hat{D}_3(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n) = 0. \quad (24)$$

ここで,

$$\hat{D}_1 = \sum_{\hat{\sigma}_i = \pm 1} h_1(\hat{p}_1 \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{p}_n \hat{\sigma}_n) b(\hat{p}_1 \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{p}_n \hat{\sigma}_n), \quad (25)$$

$$\hat{D}_2 = \left(\sum_{\hat{\sigma}_i = \pm 1}'' + \sum_{\hat{\sigma}_i = \pm 1}''' \right) h_2(\hat{p}_1 \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{p}_n \hat{\sigma}_n) b(\hat{p}_1 \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{p}_n \hat{\sigma}_n) \prod_{i=1}^n \hat{p}_i^{1-\hat{\sigma}_i}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_3 = & \sum_{\hat{\sigma}_i = \pm 1}'' h_3(\hat{p}_1 \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{p}_n \hat{\sigma}_n) b(\hat{p}_1 \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{p}_n \hat{\sigma}_n) \prod_{i=1}^n \hat{p}_i^{1-\hat{\sigma}_i} \\ & + \sum_{\hat{\sigma}_i = \pm 1}''' h_4(\hat{p}_1 \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{p}_n \hat{\sigma}_n) b(\hat{p}_1 \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{p}_n \hat{\sigma}_n) \prod_{i=1}^n \hat{p}_i^{1-\hat{\sigma}_i} \end{aligned} \quad (27)$$

であり, h_1, h_2, h_3, h_4, b の定義は

$$h_1 = i(-\sum_{i=1}^n \hat{\Omega}_i \hat{\sigma}_i) + (\sum_{i=1}^n \hat{p}_i \hat{\sigma}_i)^2, \quad (28)$$

$$h_2 = \sum_{i=1}^n \hat{p}_i \hat{\sigma}_i, \quad (29)$$

$$h_3 = -i \sum_{i=1}^n \hat{\Omega}_i \hat{\sigma}_i - (\sum_{i=1}^n \hat{p}_i \hat{\sigma}_i)^2, \quad (30)$$

$$h_4 = i \sum_{i=1}^n \hat{\Omega}_i \hat{\sigma}_i - (\sum_{i=1}^n \hat{p}_i \hat{\sigma}_i)^2, \quad (31)$$

$$b = \prod_{i < j} [(\hat{p}_i - \hat{p}_j)^2]^{-\frac{1+\sigma_i \sigma_j}{2}} \quad (32)$$

である。但し、 \hat{p}_i は任意の複素定数、 $\hat{\Omega}_i = -i\hat{p}_i^2$ である。 $\hat{\sigma}_i$ は ± 1 のいずれかをとる。 $\sum_{\hat{\sigma}_i = \pm 1}$, $\sum''_{\hat{\sigma}_i = \pm 1}$, $\sum'''_{\hat{\sigma}_i = \pm 1}$ は、各々、 $\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i = 1$, $\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i = 0$, $\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i = 2$ という条件のもとで、 $\hat{\sigma}_i = \pm 1$ のすべてのとり得る組み合わせについて和をとることを意味する。 $\prod_{i < j}$ は、 $i < j$ の制限のもとに、 n 個の要素から可能なあらゆるペアを選んで、それについて積をとることを意味する。

(22)-(24) を数学的帰納法によって証明しよう。 $n=1, 2$ について、これらを確かめるのは容易なことである。ここで、(22)-(24) が $n-2$ まで成立すると仮定しよう。すると、

$$\hat{D}_1(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n) |_{\hat{p}_1 = \hat{p}_2} = 2 \prod_{j=1}^n (\hat{p}_1 - \hat{p}_j)^2 \hat{D}_1(\hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n) = 0, \quad (33)$$

$$\hat{D}_2 |_{\hat{p}_1 = \hat{p}_2} = \hat{D}_3 |_{\hat{p}_1 = \hat{p}_2} = 0 \quad (34)$$

が示せる。さらに、 \hat{D}_i が、任意の $j \neq i$ に対して、 \hat{p}_j と \hat{p}_i を入れ替えても不変な多項式であるという事実を考慮すれば、 \hat{D}_i が

$$\hat{D}_i \propto \prod_{k \neq i}^{(n)} (\hat{p}_k - \hat{p}_i)^2 \quad (35)$$

のような因子をもつことが理解できる。従って、 \hat{D}_i は少なくとも $n(n-1)$ 次の多項式である。一方、(25)-(32)からは、 $\hat{D}_1, \hat{D}_2, \hat{D}_3$ が、各々、 $(n-1)^2/2 + 2$, $n^2/2 + 1$, $n^2/2 + 2$ 次の多項式であることが計算できる。しかるにこれは不可能であって、 \hat{D}_i は n に対しても恒等的に 0 でなければならぬ。これで証明が完成した。

§5. Nソリトン解の漸近形

Nソリトン解の $|t| \rightarrow \infty$ における漸近的なふるまいを調べよう。まず、実定数 α_i と β_i を用いて、 $p_i = \alpha_i + i\beta_i$ とおく。ここで、 α_i を正の数とすると、一般性を失わないことが確かめられる。後ほど、 β_i がソリトンの進行速度に比例することがわかるだろう。同一の β_i をもつソリトンは同じ速度で進行し、互いに離れることなく、ある種の束縛状態を形成していると言える。はじめに、 β_i がすべて異なる場合について考察してみよう。まず、 β_i を増大する順に並べる。

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_N. \quad (36)$$

そして

$$e^{\eta_n^0} = 2\alpha_n e^{-\alpha_n S_{n0} + i\varphi_{n0}} \quad (37)$$

とおく。ここに、 S_{n0} と φ_{n0} は実定数である。このように定義しておいて、 $z = S - 2\beta_n t$ を有限と仮定したときの、 $t \rightarrow \pm\infty$ における解の漸近形を計算する。結果は以下の通りである。

$$t_1 + it_2 = \frac{-2\alpha_n^2}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \operatorname{sech}(\alpha_n \tilde{z}_n^\pm) \left[\tanh(\alpha_n \tilde{z}_n^\pm) - \frac{i\beta_n}{\alpha_n} \right] \\ \times \exp \left\{ i \left[\beta_n S + (\alpha_n^2 - \beta_n^2)t - 2\arg p_n + \varphi_{n0} + \Delta\varphi_{n0}^\pm \right] \right\}, \quad (38)$$

$$t_3 = 1 - \frac{2\alpha_n^2}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \operatorname{sech}^2(\alpha_n \tilde{z}_n^\pm). \quad (39)$$

但し、

$$\tilde{z}_n^\pm = S - S_{n0} - \Delta S_{n0}^\pm - 2\beta_n t, \quad (40)$$

$$\Delta S_{n0}^+ = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2}{\alpha_n} \log \left| \frac{p_n + p_j^*}{p_n - p_j} \right|, \quad (41)$$

$$\Delta S_{n0}^- = \sum_{j=n+1}^N \frac{2}{\alpha_n} \log \left| \frac{p_n + p_j^*}{p_n - p_j} \right|, \quad (42)$$

$$\Delta\varphi_{n0}^+ = 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left[\arg \left(\frac{p_n - p_j}{p_n + p_j^*} \right) - 2\arg p_j \right], \quad (43)$$

$$\Delta\varphi_{n0}^- = 2 \sum_{j=n+1}^N \left[\arg \left(\frac{p_n - p_j}{p_n + p_j^*} \right) - 2\arg p_j \right] \quad (44)$$

である。ここで、上つき添字 \pm は、 $+$ が $t \rightarrow \infty$ での表式、 $-$

が $t \rightarrow -\infty$ における表式であることを意味する。

(38), (39) の形は, ソリトンの中心の移動 ΔS_{n0}^{\pm} , 及び位相の変化 $\Delta \varphi_{n0}^{\pm}$ を除いては, 橋本ソリトン²⁾と同一である。ゆえに, この解で表わされる変形が, $t \rightarrow \pm\infty$ で N 個の独立なソリトンに分裂することがわかる。 t が $-\infty$ から ∞ に変わる間に, n 番目のソリトンの中心と位相は, 各々

$$\Delta S_{n0} = \frac{2}{\alpha_n} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \log \left| \frac{p_n + p_j^*}{p_n - p_j} \right| - \sum_{j=n+1}^N \log \left| \frac{p_n + p_j^*}{p_n - p_j} \right| \right], \quad (45)$$

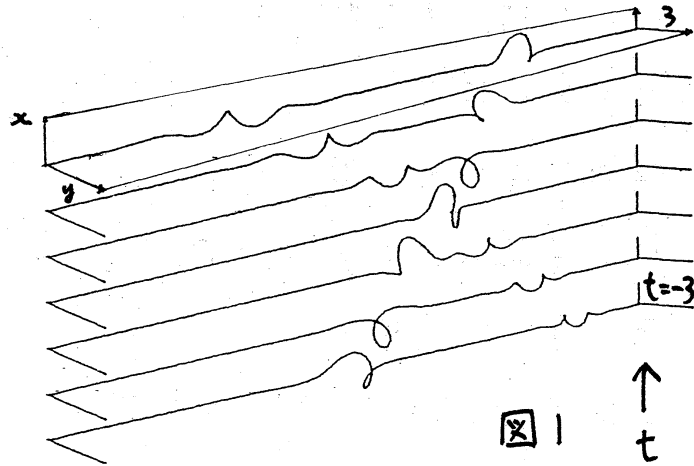
$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{n0} = 2 \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \left[\arg \left(\frac{p_n - p_j}{p_n + p_j^*} \right) - 2 \arg p_j \right] \right. \\ \left. - \sum_{j=n+1}^N \left[\arg \left(\frac{p_n - p_j}{p_n + p_j^*} \right) - 2 \arg p_j \right] \right\} \quad (46) \end{aligned}$$

だけずれる。 N ソリトン間の衝突がペアでのみ起こり, 3 体以上の衝突がないことに注目しよう。(36) の定義より, そのペアでの衝突の過程において, 速い方のソリトンの中心は, 独立変数 x に基づいてみると, 前方に移動し, 遅い方のソリトンの中心は後方に移動することがわかる。この特徴は, 通常のソリトン間の相互作用の場合と同じである。また, 各ソリトンの中心の全移動をたし合わせたものは, 次の関係式を満たすことも示せる。

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \Delta S_{n0} = 0. \quad (47)$$

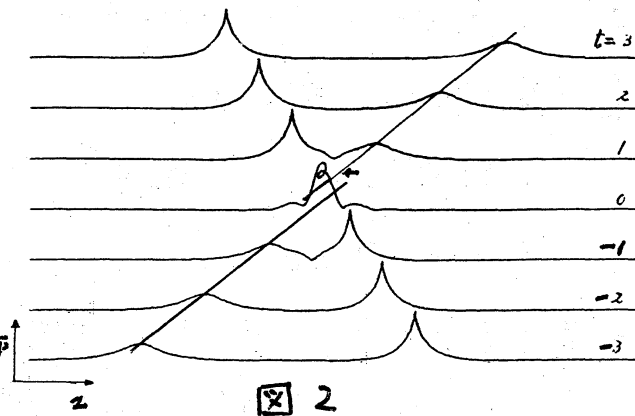
§ 6. 2ソリトンの衝突

この節では、2ソリトンの衝突の様子を具体的に図示しよう。図1は2つのソリトンの正面衝突の透視図で、左側のソリトンが、 $\alpha_1 =$



-0.75 , $\beta_1 = 2$, 右側が、 $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = -1$ に対応する。ソリトンは局在化した存在であるから、 $t = \pm\infty$ で互いに遠く離れているときには、相手の影響はほとんどなく、2つの橋本ソリトンの重ね合わせとみなせる。ソリトンが衝突してすり抜ける過程で、かなり複雑な様相を呈することが見てとれる。図1

で生ずるソリトンの中の移動を調べるために、図2では、たて軸には半径方向の変位 $\sqrt{x^2 + y^2}$ を、横軸には $\sqrt{x^2 + y^2}$ 渦糸の軸方向の座標 z



を図示する。着しい特徴は、ピーク的位置が、衝突の結果、前方ではなくて後方に移動することである。これは一見して(45)の結果と一致しないようだが、次の図3によれば、この

矛盾は解消される。

図3では、たて軸

は図2と同じで、

横軸にはここでは

独立変数 s をと、

た。まさに、(45)

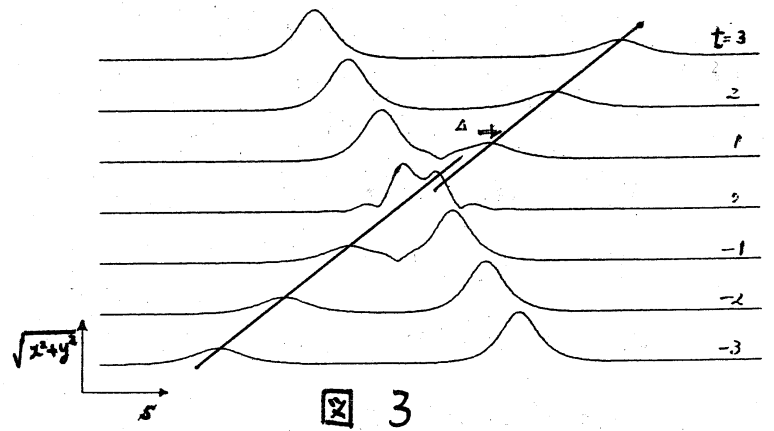


図 3

にある通り、ピークは s に関して前方に移動しているのが確認できる。ここで強調しておきたいことは、ソリトンの振幅が充分大きいときには、衝突の過程において、ソリトンの中の移動の方向が通常の場合と逆になるように見えることがあり得るということである。

最後に、 $p_1 \rightarrow p_2$ の極限で、2ソリトン解はどのようにふるまうか見てみよう。 $\Delta p = p_2 - p_1$ とする。 a_1 と a_2 も有限の複素定数として、次の条件

$$\begin{aligned} \Delta p e^{\eta_1^0} &= -a_2, & \Delta p e^{\eta_2^0} &= a_2, \\ e^{\eta_1^0} + e^{\eta_2^0} &= a_1 \end{aligned} \quad (48)$$

が満たされているもとで、極限、

$$\Delta p \rightarrow 0, \quad |e^{\eta_1^0}| \rightarrow \infty, \quad |e^{\eta_2^0}| \rightarrow \infty \quad (49)$$

における(17)と(18)の形を注意深く求める。結果は次の通り。

$$f = 1 - \frac{p_1 e^{z_1 + z_1^*}}{p_1^* (p_1 + p_1^*)^2} \left[|a_1|^2 + a_1 a_2^* \left(s - 2ip_1^* t - \frac{1}{p_1^*} - \frac{2}{p_1 + p_1^*} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + a_1^* \gamma_2 (S + 2i p_1 t + \frac{1}{p_1} - \frac{2}{p_1 + p_1^*}) \\
& + |\gamma_2|^2 \left\{ \frac{p_1^2 + 4 p_1 p_1^* - 3 p_1^{*2}}{p_1 p_1^* (p_1 + p_1^*)^2} - \frac{p_1 - p_1^*}{p_1 (p_1 + p_1^*)} (S - 2i p_1^* t) \right. \\
& \quad \left. - \frac{p_1 + 3 p_1^*}{p_1^* (p_1 + p_1^*)} (S + 2i p_1 t) + |S + 2i p_1 t|^2 \right\} \Big] \\
& + \frac{p_1^2 |\gamma_2|^4}{p_1^{*2} (p_1 + p_1^*)^3} e^{2(\bar{z}_1 + \bar{z}_1^*)} \quad , \quad (50)
\end{aligned}$$

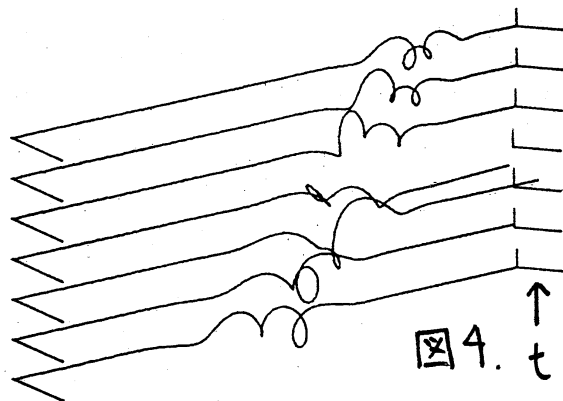
$$\begin{aligned}
g &= \frac{1}{p_1} \left[a_1 + \gamma_2 (S + 2i p_1 t - \frac{1}{p_1}) \right] e^{\bar{z}_1} \\
& + \frac{\gamma_2^2 p_1^*}{p_1^2 (p_1 + p_1^*)^4} \left[a_1^* + \gamma_2^* (S - 2i p_1^* t - \frac{4}{p_1 + p_1^*} + \frac{1}{p_1^*}) \right] e^{2\bar{z}_1 + \bar{z}_1^*} \quad (51)
\end{aligned}$$

ここで

$$\bar{z}_1 = p_1 S + i p_1^2 t \quad (52)$$

である。

図4は、 $p_1 = -0.75 + i$, $a_1 = 1 + i$, $\gamma_2 = -1 + i$ と選んだときの結果である。2つのソリトンが複雑に相互作用して、なかなか離れようとしないうかが観察される。



References

- 1) S. Fujihara and H. Takahashi : *Ōyo Buturi* (Applied Phys. in Japanese) 1937/4.
- 2) F. R. Hama : *Phys. Fluids* 5 (1962) 1156.
- 3) F. R. Hama : *Phys. Fluids* 6 (1963) 526.
- 4) R. Betchov : *J. Fluid Mech.* 22 (1965) 471.
- 5) T. Kambe and T. Takao : *J. Phys. Soc. Jpn.* 31 (1971) 591.
- 6) H. Hasimoto : *J. Phys. Soc. Jpn.* 31 (1971) 293.
- 7) H. Hasimoto : *J. Fluid Mech.* 51 (1972) 477.
- 8) E. J. Hopfinger, F. K. Browand and Y. Gagne : *J. Fluid Mech.* 125 (1982) 505.
- 9) T. Maxworthy, M. Mory and E. J. Hopfinger : *Proc. AGARD Conf. Aerodynamics of Vertical Type Flows in Three Dimensions; AGARD CPP-342*, 1983, paper 29.
- 10) T. Maxworthy, E. J. Hopfinger and L. G. Redekopp : *J. Fluid Mech.* 151 (1985) 141.
- 11) R. Hirota : *J. Phys. Soc. Jpn.* 51 (1982) 323.
- 12) D. Levi, A. Sym and S. Wojciechowski ; *Phys. Lett.* 94A (1983) 408.
- 13) A. Sym : *Lett. Nuovo Cimento* 41 (1984) 353.
- 14) R. Hirota : *J. Math. Phys.* 14 (1973) 805.